

EXAMEN DE CADENAS DE MARKOV EN TIEMPO CONTINUO
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
CURSO 2018/19

Ejercicio 1.

Un sistema informático consta de dos componentes (C_1 y C_2) y dos técnicos que los mantiene (T_1 y T_2). El técnico T_1 tan sólo puede arreglar la componente C_1 y el T_2 la componente C_2 . El tiempo que tarda en fallar las componentes C_1 y C_2 es una exponencial de media 6 horas. El tiempo que tardan los técnicos en reparar las componentes es una exponencial de media 30 minutos.

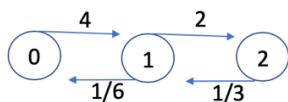
1. Representar el diagrama de transición de la cadena de Markov en tiempo continuo que representaría el problema, indicando claramente que representan los estados.
2. Si por cada hora que las componentes C_1 y C_2 no están funcionando se ocasionan unos costes de 1.000 euros. ¿Cuál es el coste medio que se obtendrán en 8 horas?
3. ¿Cuál es el tiempo medio necesario para que el sistema pase de no tener ninguna componente funcionando a tener ambas funcionando correctamente?

Si el técnico T_2 se sustituye por otro que tarda en reparar la componente C_2 un tiempo exponencial de media 1 hora, representar el diagrama de transición de la nueva cadena de Markov en tiempo continuo que representaría el problema, indicando claramente que representan los estados.

Solución:

1. Estados: $\{0,1,2\}$ que representan el número de componentes funcionando correctamente.

Diagrama de transición:



2. Resolviendo las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$\pi_0 = \frac{1}{169} \cong 0.006, \pi_1 = \frac{24}{169} \cong 0.142, \pi_2 = \frac{144}{169} \cong 0.852.$$

El coste medio que se obtendrán en 8 horas es:

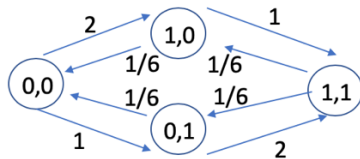
$$8(2000\pi_0 + 1000\pi_1) = \frac{16000}{13} \cong 1.231\text{€}.$$

3. El tiempo medio necesario para que el sistema pase de no tener ninguna componente funcionando a tener ambas funcionando correctamente es:

$$E(T_0) + E(T_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1/6}{2} \frac{1}{4} = \frac{37}{48} \cong 0.77 \text{ horas.}$$

4. Estados: (i, j) con $i = \begin{cases} 0, & \text{si } C_1 \text{ está fallando} \\ 1, & \text{si } C_1 \text{ está funcionando} \end{cases}$ y $j = \begin{cases} 0, & \text{si } C_2 \text{ está fallando} \\ 1, & \text{si } C_2 \text{ está funcionando} \end{cases}$

Diagrama de transición:



Ejercicio 2.

Hay tres canciones candidatas a representar a un país en Eurovisión. El proceso de llegadas de votos telemáticos de las mismas sigue un proceso de Poisson. La llegada de votos de la candidata A, una preciosa balada, tiene una tasa de 10 votos por segundo. Transcurre un tiempo medio de 1 segundo entre la llegada de dos votos consecutivos de la candidata B, canción movidita tipo ABBA. El tiempo medio que tarda en llegar el quinto voto de la candidata C, canción latina con estribillo pegadizo, es de 20 segundos.

1. Si el sistema telemático de votación permanece abierto 3 horas ¿Qué expresión nos permitiría obtener la probabilidad de que la candidata C obtenga más de 240 votos?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen tres votos consecutivos de la candidata A?
3. Sabiendo que hace 10 minutos que no ha llegado ningún voto de ninguna candidata, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente lo haga después de 15 minutos?
4. ¿Cuál es el tiempo medio hasta que llegue el quinto voto de la candidata B?
5. ¿Cuál es la probabilidad de que décimo de la candidata A llegue antes que el tercero de la candidata B?

Solución:

Partimos de tres procesos de Poisson:

Nº votos recibidos para la canción A: $\{N_A(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda_A = 10 \text{ votos/seg})$

Nº votos recibidos para la canción B: $\{N_B(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda_B = 1 \text{ voto/seg})$

Para la tercera canción tenemos que $E[S_5^C] = 20$ segundos, donde $S_5^C \sim \text{Gamma}(5, \lambda_C)$.

Por lo tanto, $20 = 5/\lambda_C \Rightarrow \lambda_C = 0.25 \text{ votos/seg}$

Nº votos recibidos para la canción C: $\{N_C(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda_C = 0.25 \text{ votos/seg})$

1. Para responder a esta pregunta debemos nos centramos en el proceso $\{N_C(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda_C = 0.25 \text{ votos/seg})$.

$$1 - \sum_{k=0}^{240} P(N_C(3 \times 60 \times 60) = k) = 1 - \sum_{k=0}^{240} e^{-0.25 \times 108000} \frac{(0.25 \times 108000)^k}{k!}$$

2. La probabilidad de que el próximo voto sea de la canción candidata A es

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} = \frac{10}{10 + 1 + 0.25} = \frac{10}{11.25}$$

La probabilidad de que lleguen tres votos consecutivos de la canción candidata A es

$$\left(\frac{10}{11.25}\right)^3$$

3. Para responder a esta pregunta debemos mezclar los tres procesos:
 N° votos telemáticos: $\{N(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda = 11.25 \text{ votos/seg})$.

Usando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial

$$P(T > 15 \cdot 60) = 1 - (T \leq 900) = e^{-11.25 \cdot 900} = e^{-10125}$$

4. Para responder a esta pregunta debemos usar el proceso $\{N_B(t), t \geq 0\} \sim \text{PP}(\lambda_B = 1 \text{ votos/seg})$

Nos piden $E(S_5^B)$, donde $S_5 \sim \text{Gamma}(5, 1)$.

Por lo tanto, $E(S_5^B) = 5/1 = 5$ segundos

5. La probabilidad de que décimo de la candidata A llegue antes que el tercero de la candidata B es:

$$P(S_{10}^A < S_3^B) = \sum_{k=10}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{10}{10+1}\right)^k \left(\frac{1}{10+1}\right)^{12-k}$$